专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第十三届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类高年级组, 2023 年 3 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	10	14	20	12	12	12	100
得分								

注意:

1. 第一至第四大题是必答题, 再从第五至第十大题中任选 3 题, 题号要填入上面的表中 (多选无效).
2. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 设函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 附近由方程 $y+2y^2+y^3=e^{-x}+x-1$ 所确定, 且 $y=Ax^2+Bx^3+o(x^3)\ (x\to 0)$. 则 $(A,B)=$ $\underline{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)}$.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\big(|x|+|y|\big)^{|xy|}=$ $\underline{1}$.

3. 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵, m 为正整数, I 为 $n\times n$ 单位矩阵. 若 $(I+A)^m=0$, 则 A 的行列式$|A|=$ $\underline{(-1)^n}$.

4. 常微分方程 $y'-\cos x\cdot\sin^2 y=\frac{1}{2}\sin 2y$ 的通解为 $\dfrac{\cos y}{\sin y}=-\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)+Ce^{-x}$, 其中 C 为任意常数.

二、(本题 10 分) 空间中有不相交的固定球 S 和固定平面 Σ，S 的球心在 P 点，半径为 r. 设 B 是一个球心在 M 点的球，它与 S 外切并和 Σ 相切.

问：1）所有可能的 M 构成何种曲面？2）点 P 与该曲面有何关系？证明你的结论.

解答. (1) (几何法)：过 P 作平面 Σ 的垂线，垂足为 O. 在垂线 PO 的延长线上取一点 Q，使得 $|OQ| = r$. 过 Q 点作平面 Σ 的平行平面 Σ^*. 这样两平行平面 Σ 和 Σ^* 的距离为 r. 于是，M 到 P 的距离，等于 M 到平面 Σ^* 的距离. 于是，在过直线 PQ 和 M 的平面 Λ 上，M 到点 P 的距离等于到交线$\Lambda \cap \Sigma^*$ 的距离，M 的的轨迹为抛物线，并以 P 为抛物线的焦点. 以 PQ 为轴作空间的旋转时，球 B 保持与球面 S 和平面 Σ 相切，M 画出一个圆周. 故所有可能的 M 构成一个旋转抛物面，并以 P 为其焦点.

....(5 分)

(2) (坐标法)：过 P 作平面 Σ 的垂线，垂足为 O. 以 O 为原点，向量 $\overrightarrow{OP}$ 所在直线为 $z-$ 轴，平面 Σ 为 $xy-$ 平面，建立空间直角坐标系. 设球 B 的球心坐标为 $M = (x, y, z)$，P 点坐标为 $(0, 0, R)$, 则有 $|MO| = z + r$. 于是，有

$$(z + r)^2 = |MO|^2 = x^2 + y^2 + (z - R)^2;$$

$$z - \frac{R - r}{2} = \frac{1}{2(R + r)}(x^2 + y^2).$$

故所有的 M 构成一个旋转抛物面. 因为标准的抛物面方程为

$$z - z_0 = \frac{1}{4F}(x^2 + y^2),$$

其中 $(0, 0, z_0)$ 为旋转抛物面的顶点，F 为焦点到顶点的距离. 故该旋转抛物面的顶点 $Q = (0, 0, \frac{R-r}{2})$, 它的焦点到顶点 Q 的长度 F 为 $4F = 2(R + r)$. 于是旋转抛物面焦点坐标为

$$(0, 0, \frac{R - r}{2}) + (0, 0, F) = (0, 0, R) = P.$$

于是. P 点恰为旋转抛物面的焦点.

....(10 分)

三、(本题 14 分) 给定 n 阶复方阵 $A \neq 0, b \in \mathbb{C}^n$ 为n 维列向量. 复系数多项式 $f(x)$ 被称为向量 b 关于A 的零化多项式是指 $f(x)$ 满足 $f(A)b = 0$ 且 $f(x) \neq 0$. 在向量 b 关于 A 的零化多项式中其次数最低的首 1 多项式称为向量 b 关于 A 的最小多项式. 现设 $p(\lambda)$ 为矩阵 A 的最小多项式. 证明: $p(\lambda)$ 必为 $\mathbb{C}^n$ 中某向量 b 关于 A 的最小多项式.

证明. 1) 取 $p(\lambda)$ 的标准分解: $p = p_1 \cdots p_s$, 其中 $p_i = (\lambda - \lambda_i)^{l_i}, l_i \geqslant 1, i = 1, \cdots, s$. $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 各不相同. 记 $X_i = \{x \in \mathbb{C}^n \mid p_i(A)x = 0\}$, 则有下列断言真.

断言 1. $\mathbb{C}^n$ 有分解: $\mathbb{C}^n = X_1 \oplus \cdots \oplus X_s$, 其中$X_i$ 均是A 的不变子空间, A 在X_i 中的最小多项式即为 p_i.

事实上, 令 $V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n \mid p_2 \cdots p_s(A)x = 0\}$. 于是由 $(p_1, p_2 \ldots p_s) = 1$ 知, $\mathbb{C}^n$ 有分解: $\mathbb{C}^n = X_1 \oplus V_1$, 其中 X_1, V_1均是 A 的不变子空间. 进一步, 若 A 在X_1 中的最小多项式为 g, A 在 V_1 中的最小多项式为 h, 则有 $g \mid p_1, h \mid p_2 \cdots p_s$.
倘若 $\deg g < \deg p_1$ 和 $\deg h < \deg p_2 \cdots p_s$ 有一个发生, 则导致 $\deg gh < \deg p$ 必发生, 从而矛盾于 p 为 A 的最小多项式(因为 $g(A)h(A)$ 零化 $\mathbb{C}^n$). 故有:
A 在X_1 中的最小多项式为p_1, A 在V_1 中的最小多项式为 $p_2 \cdots p_s$.
考虑 V_1. 由 A 在 V_1 中的最小多项式为 $p_2 \cdots p_s$, 重复前述过程有:

$$V_1 = X_2 \oplus V_2,$$

其中 $V_2 = \{x \in \mathbb{C}^n \mid p_3 \cdots p_s(A)x = 0\}$, X_2, V_2 均是A 的不变子空间, A 在X_2中的最小多项式即为p_2, A 在V_2中的最小多项式即为$p_3 \cdots p_s$. 类似推导, 得$\mathbb{C}^n = X_1 \oplus \cdots \oplus X_s$, 其中$X_i$ 均是A 的不变子空间, A 在X_i中的最小多项式即为p_i. 断言1获证.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (5 分)

2) 断言2. p_i 必是X_i 中某向量关于A 的最小多项式, $i = 1, \ldots, s$.
为此, 设$\xi_{i1}, \cdots, \xi_{it_i}$ 为X_i 的一组基, ξ_{ij} 关于 A 的最小多项式为$w_{ij}, j = 1, \cdots, t_i$.
于是由p_i 是 A 在X_i 中的最小多项式知:

$$w_{ij} \mid p_i, j = 1, \cdots, t_i.$$

w_{ij}皆具有$(\lambda - \lambda_i)^k$ 之形式, $k \leqslant l_i$.

另外, 注意到$[w_{i1},\cdots,w_{it_i}]$ 是A 在 X_i中的最小多项式, 从而有$[w_{i1},\cdots,w_{it_i}]=p_i$, 结果$\xi_{i1},\cdots,\xi_{it_i}$中必有某元, 其关于$A$ 的最小多项式为p_i. 断言 2 获证.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (10 分)

3) 现设p_1 是X_1中向量 ξ_1 关于A的最小多项式, ..., p_s 是X_s中向量 ξ_s 关于A的最小多项式. 于是, p_1p_2是X 中向量$\xi_1+\xi_2$ 关于A 的最小多项式. 为此, 一方面有$p_1p_2(A)(\xi_1+\xi_2)=p_2(A)p_1(A)\xi_1+p_1(A)p_2(A)\xi_2=0$, 从而 $\xi_1+\xi_2$ 关于A 的最小多项式$f(\lambda)$ 必是p_1p_2 的因子. 另一方面, 由$f(A)(\xi_1+\xi_2)=0$ 得$f(A)\xi_1=-f(A)\xi_2$, 注意到 $\mathbb{C}^n=X_1\oplus\cdots\oplus X_s$, 因此有$X_1\cap X_2=0$, 从而 $f(A)\xi_1=-f(A)\xi_2\in X_1\cap X_2=0$. 结果$p_1\mid f, p_2\mid f$, 即有$p_1p_2\mid f$. 从而$p_1p_2$是$X$ 中向量$\xi_1+\xi_2$ 关于A 的最小多项式.

同理可推得: $p_1p_2p_3$ 是 X 中向量 $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 关于 A 的最小多项式. 重复此过程, 最后得 $p_1p_2\cdots p_s$ 是 X 中向量 $\xi_1+\cdots+\xi_s$ 关于 A 的最小多项式, 即 $p(\lambda)$ 是 X 中向量 $\xi_1+\cdots+\xi_s$ 关于 A 的最小多项式, 证毕.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (14 分)

四、 (本题 20 分) 设 $\alpha > 0$, f 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{x^\alpha}=0$, $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} x^\alpha|f''(x)|<+\infty$.

(1) 若 $\alpha\in(0,1]$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(2) 若 $\alpha>1$, 试构造满足题设条件的函数 f 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 不成立, 且在 $[0,+\infty)$ 的任何子区间上, f' 不恒等于常数.

解答. (1) 任取 $s\in(0,1)$, 由 Taylor 公式, 对于任何 $x>1$, 存在 $\xi\in(x,x+sx^\alpha)$ 使得

$$f(x+sx^\alpha)=f(x)+f'(x)sx^\alpha+\frac{f''(\xi)}{2!}s^2x^{2\alpha}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (7 分)

因此, 注意到 $sx^\alpha\leqslant x$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right| &\leqslant\left|\frac{f(x)}{sx^\alpha}\right|+\left|\frac{f(x+sx^\alpha)}{(x+sx^\alpha)^\alpha}\right|\cdot\frac{(x+sx^\alpha)^\alpha}{sx^\alpha}+\left|\xi^\alpha f''(\xi)\right|\frac{sx^\alpha}{\xi^\alpha}\\ &\leqslant\frac{1+2^\alpha}{s}\sup_{t\geqslant x}\left|\frac{f(t)}{t^\alpha}\right|+s\sup_{t\geqslant x}\left|t^\alpha f''(t)\right|.\end{aligned}$$

令 $x\to+\infty$ 得到

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\left|f'(x)\right|\leqslant s\varlimsup_{x\to+\infty}\left|x^\alpha f''(x)\right|.$$

再令 $s\to0^+$ 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (14 分)

(2) 可以举出很多例子. 比如:

(a) $f(x)=x+\frac{1}{1+x^\alpha}\,(x\geqslant0)$, 则 $f'(x)=1-\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{(1+x^\alpha)^2}$, $f''(x)=-\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{(1+x^\alpha)^2}+\frac{2\alpha^2x^{2\alpha-2}}{(1+x^\alpha)^2}$. 易见该 f 满足要求.

(b) $f(x)=x+\int_0^x\frac{1}{1+t^\alpha}\,dt\,(x\geqslant0)$. 则 $f'(x)=1+\frac{1}{1+x^\alpha}$, $f''(x)=-\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{(1+x^\alpha)^2}$. 易见该 f 满足要求.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (20 分)

五、(本题 12 分) 证明: 在 $\mathbb{R}$ 上总存在 2 个互不相交的 Borel 集 A_1 和 A_2, 使得对任意的非空开区间 J, 成立 $|A_k \cap J| > 0$ $(k = 1, 2)$, 其中 $|E|$ 表示集合 E 的 Lebesgue 测度.

证明. (i) 首先，我们知道 $\mathbb{R}$ 上的任意非空开区间必包含一个具有正测度的、无处稠密的紧子集.

.... (3 分)

(ii) 现在设 $\{I_m\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中一列具有正测度的、端点为有理数的开区间. 对任意的 $m \in \mathbb{N}$, I_m 中包含 2 个互不相交的、具有正测度的、无处稠密的紧子集, 记为 F_m^1 和 F_m^2.

.... (6 分)

任意取定正整数 M, 即可得到一族互不相交的、具有正测度的、紧的无处稠密集 $\{F_m^k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant m < M$, 并且 $\bigcup\limits_{k=1,2,\, m<M} F_m^k$ 也是紧的无处稠密集.

(iii) I_M 中包含一个非空开子区间 J_M 与 $\bigcup\limits_{k=1,2,m<M} F_m^k$ 不交, 并且 J_M 包含 2 个互不相交的、具有正测度的、无处稠密的闭集 F_M^1, F_M^2.

.... (9 分)

(iv) 令 $A_k = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m^k$, $k = 1, 2,$. 由以上构造, A_1 和 A_2 是互不相交的 F_σ 集. 如果 J 是 $\mathbb{R}$ 上的非空开区间, 则 J 中必包含一个端点为有理数的非空开区间 I_m, 从而 $|A_k \cap J| \geqslant |F_m^k \cap I_m| > 0$ $(k = 1, 2)$.

.... (12 分)

六、(本题 12 分) 设函数 $f(z)$ 在单位圆内解析，且对一切满足 $0 < \rho < 1$ 的 ρ, 其实部 $\operatorname{Re} f(z) = u(\rho, \theta) \leqslant 1$，$u(0) = 0$，证明: $|a_n| \leqslant 2$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 这里 a_n 为 $f(z)$ 的 Taylor 展开式的系数.

证明. 设函数 f 在单位圆内的 Taylor 展式为 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. 则

$$1 - f(z) = 1 - a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (2 分)

令 $z = \rho e^{i\theta}$, $f(z) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$, 则 $1 - f(z) = 1 - u(\rho, \theta) - iv(\rho, \theta)$.

于是 a_n 可以表示为

$$\begin{aligned} -a_n =& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{1 - f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \\ =& \frac{1}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} \big(1 - u(\rho, \theta) - iv(\rho, \theta)\big) e^{-in\theta} \, d\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (4 分)

由 Cauchy 积分定理,

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \big(1 - f(\zeta)\big) \zeta^{n-1} \, d\zeta \\ =& \frac{\rho^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(1 - u(\rho, \theta) - iv(\rho, \theta)\big) e^{in\theta} \, d\theta. \end{aligned}$$

即

$$0 = \frac{1}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} \big(1 - u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)\big) e^{-in\theta} \, d\theta. \tag{2}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (6 分)

(1)+(2) 得到

$$-a_n = \frac{1}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} \big(1 - u(\rho, \theta)\big) e^{-in\theta} \, d\theta.$$

因而

$$\begin{aligned} |a_n| \leqslant& \frac{1}{\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} \big(1 - u(\rho, \theta)\big) \, d\theta \\ =& \frac{2}{\rho^n} - \frac{1}{\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (8 分)

由调和函数的中值定理,

$$\frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} u(\rho,\theta)\,d\theta = \frac{2}{\rho^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\theta)\,d\theta = \frac{2}{\rho^n}u(0) = 0,$$

故对任何 $0<\rho<1$, 有

$$|a_n| \leqslant \frac{2}{\rho^n}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

令 $\rho \to 1^-$ 即得

$$|a_n| \leqslant 2, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (12 分)

七、(本题 12 分) 设 p 为素数, 有限群 G 的阶 $|G| = p^r m$, 其中 r 为正整数且 $p \nmid m$. 对任意整数 $k, 0 \le k \le r$, 记 G 的 p^k 阶子群个数为 N_k, 证明 $N_k \equiv 1 \pmod{p}$.

证明. 设 $\mathcal{X}$ 为 G 的所有 p^k 元子集构成的集合. 对任意 $g \in G$, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{p^k}\} \in \mathcal{X}$, 定义

$$g \circ A = gA = \{ga_1, ga_2, \cdots, ga_{p^k}\}.$$

则容易验证

$$\begin{aligned} \circ:\ G \times \mathcal{X} &\to \mathcal{X} \\ (g, A) &\mapsto g \circ A \end{aligned}$$

是群 G 在集合 $\mathcal{X}$ 上的一个作用, $\mathcal{X}$ 在该作用下被划分成一些不交轨道的并.

.... (3 分)

设 $\mathcal{O} = \{C, g_1C, \cdots, g_{s-1}C\}$ 是其中的一个轨道, 由前面的定义, 显然 $\mathcal{O}$ 中至少有一个元素包含 G 的单位元 e, 不妨设 $e \in C$.

.... (4 分)

若轨道 $\mathcal{O}$ 中有元素为 G 的 p^k 阶子群, 不妨设 C 为 G 的子群, 则 $\mathcal{O}$ 中其余元素 (若存在) 都是 C 的不同的左陪集, 所以 $\mathcal{O}$ 中不为 C 的元素都不是 G 的子群, 即 $\mathcal{O}$ 包含 G 的 p^k 阶子群恰有一个. 在该作用下, C 的稳定子群为

$$G_C = \{g \in G \mid gC = C\} = C.$$

这时 $\mathcal{O}$ 中的元素个数为

$$s = [G : G_C] = [G : C] = |G|/|C| = p^{r-k}m.$$

.... (6 分)

若轨道 $\mathcal{O}$ 中任一元素都不是 G 的子群, 这时对任意 $g \in G_C$, 其中 G_C 是该作用下 C 的稳定子群, 由于 $e \in C$, 所以 $g = ge \in gC = C$, 故 $G_C \subseteq C$. 又 C 不是 G 的子群, 所以 $G_C \ne C$, 故 $|G_C| < p^k$. 这时 $\mathcal{O}$ 中的元素个数为

$$s = [G : G_C] = |G|/|G_C| \equiv 0 \pmod{p^{r-k+1}}.$$

.... (9 分)

我们知道

$$|\mathcal{X}| = \binom{p^r m}{p^k} \equiv p^{r-k} m \pmod{p^{r-k+1}}.$$

由前面证明知有 N_k 个轨道, 其中每个都恰含有一个 G 的 p^k 阶子群, 它们的元素个数之和为 $p^{r-k}mN_k$, 而其余轨道的元素个数均 $\equiv 0 \pmod{p^{r-k+1}}$, 所以

$$|\mathcal{X}| = \sum |\mathcal{O}| \equiv p^{r-k}mN_k \pmod{p^{r-k+1}}.$$

由此我们得到

$$p^{r-k}mN_k \equiv p^{r-k}m \pmod{p^{r-k+1}},$$

又 $p \nmid m$, 所以 $N_k \equiv 1 \pmod{p}$.

.... (12 分)

八、(本题 12 分) 设 $\gamma(s), s \in (0,1)$ 为空间中以弧长为参数的光滑曲线, 一个球心在 x_0 点、半径为 R 的球面 $B_R(x_0)$ 称为该曲线在 $\gamma(s_0)$ 点处的密切球面, 如果函数 $f(s) = |\gamma(s) - x_0|^2 - R^2$ 满足 $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0$. 若 $\gamma(s)$ 的曲率和绕率均非零, 证明该曲线在每一点处均存在唯一的密切球.

解答. 记 $e_1 = \gamma'(s), e_2 = \gamma''(s)/|\gamma''(s)|, e_3 = e_1 \times e_2$. 则 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为空间中的单位正交标架，并有 Frenet 方程:

$$e_1' = ke_2,\ e_2' = -ke_1 + \tau e_3,\ e_3' = -\tau e_2.$$

直接计算并利用 Frenet 方程，得

$$f(s) = |\gamma(s) - x_0|^2 - R^2;$$

$$f'(s) = 2(\gamma(s) - x_0) \cdot e_1;$$

$$f''(s) = 2 + 2k(\gamma(s) - x_0) \cdot e_2;$$

$$f'''(s) = 2k'(\gamma(s) - x_0) \cdot e_2 - 2k^2(\gamma(s) - x_0) \cdot e_1 + 2k\tau(\gamma(s) - x_0) \cdot e_3.$$

由条件

$$f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0,\ k\tau \neq 0,$$

得到

$$R = |\gamma(s_0) - x_0|;\ (\gamma(s_0) - x_0) \cdot e_1(s_0) = 0;$$

$$(\gamma(s_0) - x_0) \cdot e_2(s_0) = -\frac{1}{k(s_0)};\ (\gamma(s_0) - x_0) \cdot e_3(s_0) = \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\tau(s_0)}.$$

于是得到

$$\gamma(s_0) - x_0 = -\frac{1}{k(s_0)} e_2(s_0) + \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\tau(s_0)} e_3(s_0);$$

$$x_0 = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} e_2(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\tau(s_0)} e_3(s_0).$$

这样，密切球的球心x_0和半径R均被该曲线唯一确定. 这样，曲线在每一点都有唯一的密切球.

…………………………………………………………… (12 分)

九、(本题 12 分) 记 p 是整数，$p \geq 2$， β 是 p 维未知参数， X 是 p 维随机向量，服从正态分布 $N(0,\Sigma)$. 其中，Σ 是对称 p 阶正定矩阵. 随机误差 ε 是 1 维随机变量，服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，且与 X 独立, 其中$\sigma^2 > 0$. 记 sgn$(\cdot)$ 为符号函数，$Y = \text{sgn}(X^{\mathrm{T}}\beta_0 + \varepsilon)$ 是 1 维随机变量. 定义

$$\beta^* \triangleq \operatorname*{argmin}_{\beta \in \mathbb{R}^p} E(Y - X^{\mathrm{T}}\beta)^2,$$

其中 argmin 是使得目标函数达到最小值的点.

1. 请给出 β^* 的显式表示式.
2. 证明：$\text{cov}(X,Y) = -2\text{cov}(X, F(-X^{\mathrm{T}}\beta_0))$. 其中，$F(\cdot)$ 表示ε 的分布函数.
3. 对任意的 p 维参数向量 α, β, 当 $X \sim N(0,\Sigma)$ 时, 证明:

$$E(\alpha^{\mathrm{T}}X \big| \beta^{\mathrm{T}}X\big) = \big(\alpha^{\mathrm{T}}\Sigma\beta\big)\big(\beta^{\mathrm{T}}\Sigma\beta)^{-1}\beta^{\mathrm{T}}X\big).$$

4. 证明：β^* 与 β_0 成比例. 要求找到比例因子的显式表达式.

解答. 1. 取导可得最小值为 $\beta^* = \Sigma^{-1}\text{cov}(X,Y)$.

………………………………………………………… (2 分)

2. 根据 $Y = \text{sgn}(X^{\mathrm{T}}\beta_0 + \varepsilon)$, 有 $\text{cov}(X,Y) = E\left\{X\text{sgn}(X^{\mathrm{T}}\beta_0 + \varepsilon)\right\}$. 记 ε 的分布函数为 F. 根据重期望公式， $E\left\{X\text{sgn}(X^{\mathrm{T}}\beta_0 + \varepsilon)\right\} = -2E\left\{XF(-X^{\mathrm{T}}\beta_0)\right\}$.

………………………………………………………… (4 分)

3. $\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{T}}X \\ \beta^{\mathrm{T}}X\end{pmatrix}$ 服从正态分布, 因此, $\big(\alpha^{\mathrm{T}}X \big| \beta^{\mathrm{T}}X\big)$ 依然服从条件正态分布. 其均值为结论.

………………………………………………………… (6 分)

4. 再次使用重期望公式，我们得到

$$E\left\{XF(-X^{\mathrm{T}}\beta_0)\right\} = \Sigma\beta_0(\beta_0^{\mathrm{T}}\Sigma\beta_0)^{-1}\text{cov}\left\{(X^{\mathrm{T}}\beta_0), F(-X^{\mathrm{T}}\beta_0)\right\}.$$

总结以上结果, 我们有

$$\Sigma^{-1}\text{cov}(X,Y) \quad = \quad -2\Big[(\beta_0^{\mathrm{T}}\Sigma\beta_0)^{-1}\text{cov}\left\{(X^{\mathrm{T}}\beta_0), F(-X^{\mathrm{T}}\beta_0)\right\}\Big]\beta_0 \triangleq c\beta_0.$$

………………………………………………………… (9 分)

当 $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$ 时，利用分部积分可以得到

$$
\begin{aligned}
& E\left\{(X^{\mathrm{T}}\beta_0)F(-X^{\mathrm{T}}\beta_0)\right\} = -(\beta_0^{\mathrm{T}}\Sigma\beta_0)E\left\{f(-X^{\mathrm{T}}\beta_0)\right\} \\
= & -\frac{1}{2}(\beta_0^{\mathrm{T}}\Sigma\beta_0)\{\frac{\pi(\sigma^2+1)}{2}\}^{-1/2},
\end{aligned}
$$

其中 $f(\cdot)$ 是 ε 的密度函数. 从而，比例常数 c 化归为 $(\beta_0^{\mathrm{T}}\Sigma\beta_0)\{\frac{\pi(\sigma^2+1)}{2}\}^{-1/2}$, 这就完成了我们的证明.

.... (12 分)

十、(本题 12 分) 给出 QR 方法求矩阵特征值的算法描述, 并证明算法的收敛性.

解答. 1. QR 方法是利用正交变换将一个给定的矩阵逐步约化为上三角阵或者拟上三角阵的种迭代方法. QR 方法计算实方阵 A 的特征值的步骤如下:

1. 令$A_1 = A, m = 1$;
2. 计算 A_m 的 QR 分解: $A_m = Q_m R_m$; 其中 Q_m 是正交方阵, R_m 为上三角阵.
3. 令$A_{m+1} = R_m Q_m$;
4. 如果 A_{m+1} 的下三角元素的绝对值小于某个阈值，算法停止；否则, 令 $m := m+1$, 转第2步.
5. A_{m+1} 的对角元即为所求特征值.

.... (2 分)

2. 关于 QR 算法收敛性, 我们有以下结论:

设实方阵 A 的 n 个特征值满足 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$. 用 Y 表示 A 的左特征向量构成的矩阵, 并假设 Y 具有 LU 分解: $Y = LU$. 则由 QR 算法产生的矩阵序列 $\{A_m\}$趋于上三角阵, 同时其对角元趋向于特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

证明. 由 QR 算法知, $A_{m+1} = Q_m^{-1} A_m Q_m$. 反复利用这一关系可得

$$A_m = \widetilde{Q}_m^{-1} A \widetilde{Q}_m \tag{1}$$

其中 $\widetilde{Q}_m = Q_1 Q_2, \cdots, Q_{m-1}, \widetilde{Q}_1 = I$, $A_1 = A$. 由此可知矩阵序列 $\{A_m\}$ 中的每一个矩阵都与矩阵 A 相似. 将 $A_m = Q_m R_m$ 代入 $A_m = \widetilde{Q}_m^{-1} A \widetilde{Q}_m$ 得

$$\widetilde{Q}_m Q_m R_m = A \widetilde{Q}_m,$$

从而有

$$\widetilde{Q}_m Q_m R_m R_{m-1} \cdots R_1 = A \widetilde{Q}_m R_{m-1} \cdots R_1,$$

即 $\widetilde{Q}_{m+1} \widetilde{R}_{m+1} = A \widetilde{Q}_m \widetilde{R}_m$, 其中 $\widetilde{R}_m = R_{m-1}, \cdots, R_1$. 利用此递推关系可得:

$$A^m = \widetilde{Q}_{m+1} \widetilde{R}_{m+1}. \tag{2}$$

.... (5 分)

由于 Y 是 A 的左特征向量构成的矩阵, 故 $YA = \Lambda Y, \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 令 $X = Y^{-1}$, 则有 $A = X\Lambda Y$. 由假设 Y 有分解 $Y = LU$, 其中 L 是单位下三角阵, U 是上三角阵, 则有

$$A^m = X\Lambda^m Y = X\Lambda^m LU = X(\Lambda^m L \Lambda^{-m})\Lambda^m U = X(I + E_m)\Lambda^m U \qquad (3)$$

其中 $I + E_m = \Lambda^m L \Lambda^{-m}$. 由于 L 是单位下三角阵，而 $|\lambda_i| > |\lambda_j|(i > j)$，故必有

$$\lim_{m\to\infty} E_m = 0. \qquad (4)$$

.... (7 分)

现在令X的QR分解为$X = QR$，由于X非奇异，我们可要求R对角元均为正数．将这一分解代入式（3）可得

$$A^m = QR(I + E_m)\Lambda^m U = Q(I + RE_mR^{-1})R\Lambda^m U. \qquad (5)$$

当m充分大时，$I + RE_mR^{-1}$是非奇异的，故它有如下的QR分解：

$$I + RE_mR^{-1} = \widehat{Q}_m \widehat{R}_m, \qquad (6)$$

其中$\widehat{R}_m$的对角元均为正数．从（4）和（6）两式不难推出

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{Q}_m = \lim_{m\to\infty} \widehat{R}_m = I$$

将式（6）代入（5）式，得

$$A^m = (Q\widehat{Q}_m)(\widehat{R}_m R \Lambda^m U).$$

.... (9 分)

即我们已找到了A^m的一个 QR 分解．为了保证这一分解中上三角阵的对角元均为正数，我们定义

$$D_1 = \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \cdots, \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}\right),$$

$$D_2 = \operatorname{diag}\left(\frac{u_{11}}{|u_{11}|}, \cdots, \frac{u_{nn}}{|u_{nn}|}\right),$$

其中u_{ii}是U的第i个对角元. 于是

$$A^m = (Q\widehat{Q}_m D_1^m D_2)(D_2^{-1} D_1^{-m} \widehat{R}_m R \Lambda^m U).$$

将上式与式（2）比较, 并注意到 QR 分解的唯一性, 即有

$$\widetilde{Q}_m = Q\widehat{Q}_m D_1^m D_2, \quad \widetilde{R}_m = D_2^{-1} D_1^{-m} \widehat{R}_m R \Lambda^m U.$$

将上式代入式 (1)可得

$$A_m = D_2^{-1}(D_1^{-1})^m \widehat{Q}_m^{-1} Q^{-1} A Q \widehat{Q}_m D_1^m D_2.$$

再注意到

$$A = X\Lambda Y = X\Lambda X^{-1} = QR\Lambda R^{-1} Q^{-1},$$

即知

$$A_m = D_2^{-1}(D_1^{-1})^m \widehat{Q}_m^{-1} R\Lambda R^{-1} \widehat{Q}_m D_1^m D_2.$$

注意到 $\lim_{m\to\infty} \widehat{Q}_m = I$以及$R$为上三角阵, 便可立即推出定理的结论成立.

. . . . (12 分)

□