

第十四届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (数学 A 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中已知单叶双曲面 S 的方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. 求过 $P = (1, 1, 1)$ 点落在单叶双曲面 S 上的两条直线之间的夹角.

解答. 设过 P 点直线的方向向量 (单位向量) 为

$$(1) \quad v = (a, b, c), \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad c > 0,$$

则直线的参数方程为

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + (a, b, c)t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

设它整体落在单叶双曲面 S 上, 代入 S 的方程, 得到

$$(1 + at)^2 + (1 + bt)^2 - (1 + ct)^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$2(a + b - c)t + (a^2 + b^2 - c^2)t^2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

..... (5 分)

于是得到

$$(2) \quad a + b - c = 0, \quad a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

由方程 (1) 和 (2) 得到

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{2}, \quad a + b = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由此求得两个直线方向

$$v_1 = (a, b, c) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad v_2 = (a, b, c) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

得到两条过 P 且落在单叶双曲面 S 上的直线

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + v_1 t, \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + v_2 t.$$

这两条直线的夹角 θ 满足

$$\cos \theta = v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{2}.$$

故两直线夹角为 60° (或 120° , 跟直线定向有关).

..... (15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^2} = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n^2} = b$. 证

明极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ 存在并求其值.

解答. 对于 $n \geq 1$, 记 $A_n = \frac{a_n}{n^2} - a$, $B_n = \frac{b_n}{n^2} - b$. 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = 0$. 从而 $\{A_n\}, \{B_n\}$ 有界. 记 $M = \sup_{n \geq 1} (|A_n| + |B_n|) + |a| + |b|$.

..... (4 分)

由 Stolz 公式或利用定积分, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=0}^n k^2 (n-k)^2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^3} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{k^3}{n^4} + \sum_{k=0}^n \frac{k^4}{n^5} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

..... (8 分)

另一方面, 对于 $n \geq 2$, 有

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{n^5} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} - \frac{ab}{n^5} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 (n-k)^2 - \frac{a_0 b_n + a_n b_0}{n^5} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 (n-k)^2 (A_k B_{n-k} + b A_k + a B_{n-k}) \right| \\ &\leq \frac{M}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (|A_k| + |B_k|). \end{aligned}$$

..... (12 分)

由 Stolz 公式,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (|A_k| + |B_k|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} M (|A_n| + |B_n|) = 0.$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = ab \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 (n-k)^2 = \frac{ab}{30}.$$

..... (15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 与 A 可交换, 其元素均为正整数且行列式为 1. 证明存在正整数 k 使得 $B = A^k$.

证明. 令

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由于 B 与 A 可交换, 可得 $c = b, d = a - b$. B 的元素均为正整数, 故 a, b 为正整数且 $a > b$. 再由 $\det B = 1$ 得到 $a^2 - ab - b^2 = 1$.

..... (5 分)

若 $b = 1$, 则由 $a^2 - ab - b^2 = 1$ 易得 $a = 2$, 因此

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

若 $b > 1$, 考察矩阵

$$B_1 = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2b-a \\ 2b-a & 2a-3b \end{pmatrix}.$$

令 $a_1 = a - b, b_1 = 2b - a$, 则有 $2a - 3b = a_1 - b_1$, 即

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 - b_1 \end{pmatrix}.$$

显然 a_1 为正整数. 注意到 $a^2 - ab - b^2 = 1$, 若 $a \geq 2b$, 则有 $1 + b^2 = a^2 - ab = a(a - b) \geq 2b^2$, 即 $b^2 \leq 1$, 矛盾, 由此得到 $b_1 = 2b - a$ 也是正整数. 显然 $a_1^2 - a_1b_1 - b_1^2 = \det B_1 = (\det A)^{-1} \det B = 1$, 即 $a_1(a_1 - b_1) = 1 + b_1^2 > 0$, 从而 $a_1 > b_1$. 这表明矩阵 B_1 中的元素 a_1, b_1 满足矩阵 B 中元素 a, b 所满足的条件, 但是 $b_1 = b - (a - b) < b$. 若 $b_1 > 1$, 则类似地矩阵

$$B_2 = A^{-1}B_1 = (A^{-1})^2B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

中的元素 a_2, b_2 也满足矩阵 B 中元素 a, b 所满足的条件, 但是 $b_2 < b_1 < b$. 继续进行下去, 通过左乘 A^{-1} 有限次, 比如 s 次后可以使得得到的矩阵

$$B_s = (A^{-1})^s B = \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ b_s & a_s - b_s \end{pmatrix}$$

中的元素 a_s, b_s 满足 $a_s > b_s > 0, a_s^2 - a_s b_s - b_s^2 = 1$ 且 b_s 为最小正整数, 即 $b_s = 1$.
 (12 分)
 由前面的证明得到 $B_s = A$, 从而 $B = A^{s+1}$, 令 $k = s + 1$ 即可.
 (15 分)

命题组版权所有

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 $n \geq 2$ 为正整数, 证明多项式 $f(x) = x^n - x - 1$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明. 对任意多项式 $F(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$, 用 $\tilde{F}(x)$ 表示 $F(x)$ 的互反多项式, 即

$$\tilde{F}(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = x^{\deg F} F\left(\frac{1}{x}\right).$$

显然有 $\tilde{\tilde{F}}(x) = F(x)$ 且若 $F(x) = G(x)H(x)$ 为多项式 $G(x)$ 和 $H(x)$ 的乘积, 则 $\tilde{F}(x) = \tilde{G}(x)\tilde{H}(x)$ 是互反多项式 $\tilde{G}(x)$ 和 $\tilde{H}(x)$ 的乘积.

..... (5 分)

下面证明 $f(x) = x^n - x - 1$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约. 若 $n = 2$, 则结论显然成立.

..... (7分)

下面设 $n \geq 3$. 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 由于 $f(x)$ 本原, 所以存在整系数多项式 $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 使得 $f(x) = g(x)h(x)$ 且 $1 \leq \deg g(x) = r < n$. 这时 $\deg h(x) = n - r$. 进一步地, 由于 $f(x)$ 的首项系数为 1, 常数项为 -1 , 我们可以假设 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的首项系数均为 1, 而它们的常数项只能是 ± 1 .

..... (10 分)

令 $k(x) = g(x)\tilde{h}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 即由于 $\deg \tilde{h}(x) = \deg h(x) = n - r$, 我们有 $\deg k(x) = n$, 且

$$k(x)\tilde{k}(x) = g(x)\tilde{h}(x)\tilde{g}(x)h(x) = f(x)\tilde{f}(x). \quad (1)$$

..... (12 分)

显然 $\tilde{f}(x) = -x^n - x^{n-1} + 1$, 所以

$$f(x)\tilde{f}(x) = -x^{2n} - x^{2n-1} + x^{n+1} + 3x^n + x^{n-1} - x - 1.$$

记 $k(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$, 则显然有 $b_n, b_0 = \pm 1$. 比较 (1) 式两端 x^n 的系数得到

$$b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2 + b_n^2 = 3,$$

所以 $b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2 = 1$. 由于 $b_1, \cdots, b_{n-1}$ 均为整数, 所以 $b_1, \cdots, b_{n-1}$ 中恰有一个为 ± 1 而其余均为 0, 即 $k(x)$ 形如 $k(x) = b_n x^n + b_i x^i + b_0, 1 \leq i \leq n-1$, 且 $b_n, b_i, b_0 = \pm 1$. 由此得到

$$k(x)\tilde{k}(x) = b_n b_0 x^{2n} + b_n b_i x^{2n-i} + b_i b_0 x^{n+i} + 3x^n + b_n b_i x^i + b_i b_0 x^{n-i} + b_n b_0.$$

下面看 (1) 式中次数 $< n$ 的各项系数, 常数项 $b_n b_0 = -1$, 由此得到 $b_0 = -b_n$. 又由 $n \geq 3$ 有 $n > n-1 > 1$, 所以 $n-i \neq i$. 若 $n-i > i$, 则有 $i = 1$ 且 $b_i = b_0 = -b_n$, 这时 $k(x) = b_n x^n - b_n x - b_n = b_n f(x)$. 若 $n-i < i$, 则有 $i = n-1$ 且 $b_i = b_n = -b_0$, 这时 $k(x) = b_n x^n + b_n x^{n-1} - b_n = -b_n \tilde{f}(x)$. 这样我们证明了 $k(x) = \pm f(x)$ 或者 $k(x) = \pm \tilde{f}(x)$.

..... (18 分)

若 $k(x) = \pm f(x)$, 则有 $\tilde{h}(x) = \pm h(x)$. 故 $h(x)$ 的任一复根就是 $f(x)$ 和 $\tilde{f}(x)$ 的公共根. 类似地, 若 $k(x) = \pm \tilde{f}(x)$, 则有 $\tilde{g}(x) = \pm g(x)$. 故 $g(x)$ 的任一复根也是 $f(x)$ 和 $\tilde{f}(x)$ 的公共根. 这表明不论那种情况, $f(x)$ 和 $\tilde{f}(x)$ 都有公共根.

设 α 是 $f(x)$ 和 $\tilde{f}(x)$ 的一个公共根, 则有 $\alpha \neq 0, \alpha^n = \alpha + 1$ 且 $\alpha^n = -\alpha^{n-1} + 1$, 由此得到 $\alpha^{n-1} = -\alpha$, 即 $\alpha^n = -\alpha^2$. 从而 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, 故 $\alpha^3 = 1$, 所以 $\alpha^n = 1, \alpha$ 或者 α^2 . 若 $\alpha^n = 1$, 则有 $1 = \alpha + 1$, 即 $\alpha = 0$, 矛盾. 若 $\alpha^n = \alpha$, 则有 $\alpha = \alpha + 1$, 矛盾. 若 $\alpha^n = \alpha^2$, 则有 $\alpha^2 = -\alpha^2$, 即 $\alpha = 0$, 矛盾. 所以 $f(x) = x^n - x - 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

..... (20 分)

注: 也可以利用多项式 $f(x)$ 与 $\tilde{f}(x)$ 互素来说明 $f(x)$ 和 $\tilde{f}(x)$ 没有公共根.

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$, 函数 f 在 $[-1, 2]$

上有界, 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + \beta_n\right) = \int_0^1 f(x) dx$.

证明. 记 $M = \sup_{x \in [-1, 2]} |f(x)|$, $m_n = [n|\beta_n|] + 1$. 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_n}{n} = 0$. 从而存在 $N \geq 1$ 使得当 $n \geq N$ 时, $2m_n \leq n$. 考虑 $n \geq 3N + 3$, 我们有

$$\begin{aligned}
& n \left| \int_{\frac{k}{n} + \beta_n}^{\frac{k+1}{n} + \beta_n} \left(f\left(\frac{k}{n} + \beta_n\right) - f(x) \right) dx \right| \\
& \leq \sup_{t \in [\frac{k}{n} + \beta_n, \frac{k+1}{n} + \beta_n]} f(t) - \inf_{t \in [\frac{k}{n} + \beta_n, \frac{k+1}{n} + \beta_n]} f(t) \\
& \leq \left(\sup_{t \in [\frac{k}{n} - |\beta_n|, \frac{k+1}{n} - |\beta_n|]} f(t) - \inf_{t \in [\frac{k}{n} - |\beta_n|, \frac{k+1}{n} - |\beta_n|]} f(t) \right) \\
& \quad + \left(\sup_{t \in [\frac{k}{n} + |\beta_n|, \frac{k+1}{n} + |\beta_n|]} f(t) - \inf_{t \in [\frac{k}{n} + |\beta_n|, \frac{k+1}{n} + |\beta_n|]} f(t) \right), \quad m_n \leq k \leq n - m_n.
\end{aligned}$$

(5 分)

因此

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} + \beta_n\right) - \int_0^1 f(x) dx \right| \\
& \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=m_n}^{n-m_n} f\left(\frac{k}{n} + \beta_n\right) - \int_{\frac{m_n}{n} + \beta_n}^{1 - \frac{m_n}{n} + \beta_n} f(x) dx \right| + \frac{6m_n}{n} \\
& = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=m_n}^{n-m_n} \int_{\frac{k}{n} + \beta_n}^{\frac{k+1}{n} + \beta_n} \left(f\left(\frac{k}{n} + \beta_n\right) - f(x) \right) dx \right| + \frac{6m_n}{n} \\
& \leq (U(f; P_n) - L(f; P_n)) + (U(f; Q_n) - L(f; Q_n)) + \frac{6m_n}{n},
\end{aligned}$$

其中 $U(f, P)$ 以及 $L(f, P)$ 依次表示 f 对应与于 $[0, 1]$ 的划分 P 的 Darboux 上和与 Darboux 下和, P_n 表示分点为 $\{\frac{k}{n} - |\beta_n| | n|\beta_n| \leq k \leq n\} \cup \{a, b\}$ 的划分, Q_n 表示分点为 $\{\frac{k}{n} + |\beta_n| | 1 \leq k \leq n - n|\beta_n|\} \cup \{a, b\}$ 的划分.

于是由 f 在 $[0, 1]$ 的可积性以及 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_n}{n} = 0$ 得到结论.

(15 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 f 在 $[0, +\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积. 对于 $x \geq 0$, 定义 $F(x) = \int_0^x t^\alpha f(t+x) dt$.

(1) 若 $\alpha \in (-1, 0)$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明: F 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

(2) 若 $\alpha \in (0, 1)$, f 以 $T > 0$ 为周期, $\int_0^3 f(t) dt = 2022$. 证明: F 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

证明. (1) 由题设, f 有界. 记 $M = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$. 对于 $y > x \geq 0$, 记 $\delta = y - x$, 我们有

$$\begin{aligned}
 |F(y) - F(x)| &= \left| \int_0^{x+\delta} t^\alpha f(t+x+\delta) dt - \int_0^x t^\alpha f(t+x) dt \right| \\
 &\leq 2M \int_x^{x+\delta} t^\alpha dt + M \int_0^\delta t^\alpha dt + \left| \int_0^x t^\alpha f(t+x+\delta) dt - \int_\delta^{x+\delta} t^\alpha f(t+x) dt \right| \\
 &\leq 3M \int_0^\delta t^\alpha dt + M \int_0^x (t^\alpha - (t+\delta)^\alpha) dt \\
 &= \frac{3M}{1+\alpha} \delta^{1+\alpha} + \frac{M}{1+\alpha} (x^{1+\alpha} - (x+\delta)^{1+\alpha} + \delta^{1+\alpha}) \\
 &\leq \frac{4M}{1+\alpha} \delta^{1+\alpha} = \frac{4M}{1+\alpha} |y-x|^{1+\alpha}.
 \end{aligned}$$

因此, F 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

..... (14 分)

(2) 我们指出, 若函数 g 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 则 g 是“线性增长”的, 即存在常数 C_1, C_2 使得

$$|g(x)| \leq C_1 + C_2 x, \quad \forall x \geq 0.$$

具体地, 有 $\delta_0 > 0$ 使得

$$|g(x) - g(y)| \leq 1, \quad \forall 0 \leq x \leq y < x + \delta_0.$$

因此, 对于任何 $x \geq 0$,

$$|g(x)| \leq |g(0)| + \left[\frac{x}{\delta_0} \right] + 1 \leq |g(0)| + 1 + \frac{x}{\delta_0}.$$

记 $A = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, $G(x) = \int_0^x (f(t) - A) dt$. 则 $G(T) = G(0) = 0$. 由此易见 G 以 T 为周期. 从而 G 有界. 设 $M = \max_{x \in [0, T]} |G(x)|$.

若 $A \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^x t^\alpha f(t+x) dt \right| \geq \frac{|A|}{1+\alpha} x^{1+\alpha} - \left| \int_0^x t^\alpha (f(t+x) - A) dt \right| \\ &= \frac{|A|}{1+\alpha} x^{1+\alpha} - \left| x^\alpha G(2x) - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} G(t+x) dt \right| \\ &\geq \frac{|A|}{1+\alpha} x^{1+\alpha} - 2Mx^\alpha, \quad \forall x \geq 0. \end{aligned}$$

因此, F 在 $[0, +\infty)$ 上非线性增长, 从而 F 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

..... (16 分)

若 $A = 0$, 则

$$F(x) = x^\alpha G(2x) - \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} G(t+x) dt, \quad \forall x \geq 0.$$

由我们在 (1) 的证明中所证明的结果可见, 只要说明 $H(x) = x^\alpha G(2x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续. 由题设, $G(3) = 2022$, 而 $G(0) = 0$, 因此, G 不恒为常数. 于是对于任何 $\delta > 0$, 有 $s \in (0, \delta)$ 以及 $X \geq 0$ 使得 $G(2X + 2s) \neq G(2X)$. 从而

$$\begin{aligned} & \left| H(X + s + nT) - H(X + nT) \right| \\ &= \left| (X + s + nT)^\alpha G(2X + 2s + 2nT) - (X + nT)^\alpha G(2X + 2nT) \right| \\ &\geq \left| (X + nT)^\alpha \left(G(2X + 2s + 2nT) - G(2X + 2nT) \right) \right| \\ &\quad - \left| G(2X + 2s + 2nT) \left((X + s + nT)^\alpha - (X + nT)^\alpha \right) \right| \\ &\geq (X + nT)^\alpha \left| G(2X + 2s) - G(2X) \right| - Ms^\alpha, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

特别,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| H(X + s + nT) - H(X + nT) \right| = +\infty.$$

因此, H 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续, 从而 F 在 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

..... (20 分)

注. 本题证明路径多, 请注意证明中出现的 x^α , $x^{1+\alpha}$ 的单调性(单增还是单减), 以及 $\int_0^1 t^s ds$ 的收敛性.